SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1994-95

Sergio Polidoro

UN METODO ALLE DIFFERENZE FINITE PER L'EQUAZIONE DI KOLMOGOROV

15 giugno 1995

Tecnoprint - Bologna 1995

Riassunto. Viene definito un operatore L_G, costituito da differenze finite, calcolate su un insieme discreto $G \subset \mathbf{R}^3$, che approssima l'operatore di Kolmogorov

$$L = \partial_x^2 + x\partial_y - \partial_t.$$

L_G viene costruito sostituendo un rapporto incrementale secondo alla derivata ∂_x^2, ed un rapporto incrementale lungo il vettore $v = (0, x, -1)$ alla derivata prima $x\partial_y - \partial_t$. Viene poi fornita una condizione di stabilità per le soluzioni di $L_G w = 0$.

Successivamente si studia un problema di Dirichlet relativo all'equazione di Kolmogorov e si dimostra che, se vale la condizione di stabilità, le soluzioni del problema di Dirichlet relativo ad L_G convergono alla soluzione del problema di Dirichlet relativo ad L.

Abstract. We define a grid $G \subset \mathbf{R}^3$ and a "discrete" operator L_G, which is *consistent* with the Kolmogorov operator

$$L = \partial_x^2 + x\partial_y - \partial_t.$$

We obtain such an operator by substituting the derivatives of the operator L with finite differences. In particular the first derivative $x\partial_y - \partial_t$ is replaced by a finite difference along the vector $v = (0, x, -1)$.

Next we give a *stability* condition for the solutions of $L_G w = 0$, which is the same condition corresponding to the heat equation in two variables: $\partial_x^2 - \partial_t$. Under this condition we prove a maximum principle relative to L_G.

Then we consider a Dirichlet problem for the Kolmogorov equation $Lu = 0$ and define a corresponding "discrete" Dirichlet problem for $L_G w = 0$. Using the above maximum principle we show that the solutions of the discrete Dirichlet problem converge to the solution of the Dirichlet problem relative to $Lu = 0$.

1. Introduzione e principali risultati.

I risultati che esporrò in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con C. Mogavero, e costituiscono una parte della sua Tesi di Laurea [Mo].

Presenterò un metodo di approssimazione numerica per la soluzione di un problema di Dirichlet relativo all'equazione di Kolmogorov in $\mathbf{R}^3$

$$Lu \equiv u_{xx} + xu_y - u_t = 0 \tag{1.1}$$

e all'insieme

$$Q = \left\{(x,y,t) \in \mathbf{R}^3 : -1 < x < 1, -1 < y < 1, 0 < t < 1\right\}.$$

L'equazione di Kolmogorov (1.1) è l'esempio più semplice della seguente classe di equazioni ultraparaboliche degeneri definite per $(x,t) = (x_1, ..., x_N, t) \in \mathbf{R}^{N+1}$:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} u_{x_i,x_j} + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i u_{x_j} - u_t = 0, \tag{1.2}$$

dove $A = (a_{i,j})$ e $B = (b_{i,j})$ sono matrici costanti $N \times N, A$ è simmetrica e semidefinita positiva ed è verificata l'ipotesi:

[H1]. *Tra le righe delle matrici $A, AB, ..., AB^k, ...$ ve ne sono N linearmente indipendenti.*

Queste equazioni sono dette equazioni di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck, e godono di proprietà di regolarità analoghe a quelle degli operatori parabolici.

La proprietà più notevole è senz'altro la seguente: se indichiamo con $\Gamma(z,\zeta)$ la soluzione fondamentale di (1.2) con polo nel punto $\zeta \in \mathbf{R}^{N+1}$, allora $\Gamma(z,\zeta)$ è di classe C^∞ in $\mathbf{R}^{N+1} \backslash \{\zeta\}$.

Queste proprietà sono strettamente collegate ad una struttura di gruppo di traslazioni (non euclidee) e ad un gruppo di dilatazioni, rispetto alle quali gli operatori suddetti sono invarianti. Nel caso particolare dell'operatore (1.1), per ogni $(\xi,\eta,\tau) \in \mathbf{R}^3$, la traslazione $\mathcal{T}_{(\xi,\eta,\tau)}$ è definita da

$$\mathcal{T}_{(\xi,\eta,\tau)}(x,y,t) = (x+\xi, y+\eta-t\xi, t+\tau), \tag{1.3}$$

e, per ogni $\lambda > 0$, la dilatazione $D(\lambda)$ è

$$D(\lambda)(x,y,t) = \left(\lambda x, \lambda^3 y, \lambda^2 t\right). \tag{1.4}$$

Per questi risultati e per le motivazioni che hanno portato a studiarli rimandiamo senz'altro al lavoro [LP] ed alla bibliografia ivi citata. Ricordiamo solamente che equazioni del tipo (1.2) intervengono nella descrizione del moto di particelle browniane in un fluido.

Per quanto riguarda il problema di Dirichlet relativo all'equazione di Kolmogorov sull'insieme Q, notiamo che non è chiaro a priori su quali punti di ∂Q sia naturale

assegnare il dato. Per questo motivo abbiamo dapprima considerato il problema di Dirichlet "generalizzato"

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } Q \\ u = \varphi & \text{in } \partial Q, \end{cases} \tag{1.5}$$

con $\varphi \in C(\overline{Q})$, nel contesto della teoria degli spazi armonici astratti. Innanzitutto si determina una "soluzione generalizzata nel senso di Perron-Wiener" $u \in C^\infty(Q)$ del problema (1.5). Tale funzione risolve in Q l'equazione $Lu = 0$, ma non è detto che assuma il dato φ in tutti i punti di ∂Q.

Il problema di individuare i *punti regolari* del bordo di un aperto, nei quali il dato φ viene effettivamente assunto, è stato studiato in [Ma] nel caso più generale degli operatori (1.2) e per aperti limitati qualunque. Nel caso che stiamo considerando, si ottiene una caratterizzazione completa dell'insieme $\partial_r Q$ dei punti regolari di ∂Q, che descriveremo dettagliatamente nel paragrafo 2.

I risultati sopra richiamati ed un principio del massimo per le soluzioni di $Lu = 0$ assicurano l'esistenza e l'unicità di una funzione $u \in C(\overline{Q}) \cap C^\infty(Q)$ soluzione del problema di Dirichlet "classico"

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{in } Q \\ u = \varphi & \text{in } \partial_r Q. \end{cases} \tag{1.6}$$

Non riportiamo qui la prova di quest'ultima affermazione.

Nel paragrafo 3 costruiremo un operatore L_G, costituito da differenze finite, calcolate nei punti dell'insieme

$$G = \Big\{(j\Delta_x, k\Delta_y, n\Delta_t) \in \mathbf{R}^3 : j, k, n \in Z\Big\}, \tag{1.7}$$

che sia *consistente* con l'operatore L, nel senso che

$$L_G u = Lu + \big((\Delta_x)^2 + \Delta_t\big) O(\Delta_x, \Delta_t). \tag{1.8}$$

Qui $O(\Delta_x, \Delta_t)$ indica una funzione limitata in un intorno dello zero. Osserviamo che per garantire la (1.7) sarà necessario imporre che

$$\Delta_y = \Delta_x \Delta_t. \tag{1.9}$$

Potremo inoltre osservare che l'insieme

$$H = G \cap \overline{Q},$$

su cui studieremo il *problema di Dirichlet discreto*

$$\begin{cases} L_G w = 0 & \text{in } H_0 \\ w = \varphi & \text{in } \partial_r H, \end{cases} \tag{1.10}$$

si divide in maniera naturale in due sottoinsiemi: $\partial_r H$ su cui si assegna il dato, e H_0 in cui l'operatore L_G è ben definito, nel senso che mette in relazione solamente i punti di H.

Nel paragrafo 4 si dimostra un risultato di convergenza delle soluzioni del problema (1.10) alla soluzione di (1.5).

Proveremo innanzitutto che, se supponiamo

$$\frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} \leq \frac{1}{2}, \tag{1.11}$$

allora vale un principio di massimo per le soluzioni del problema (1.10) (Teorema 4.1).

La (1.11) viene detta *condizione di stabilità*, in quanto assicura che le soluzioni approssimate costituiscono una famiglia limitata (Corollario 4.2).

Osserviamo che la condizione (1.11) è esattamente la stessa che si richiede per l'equazione del calore in due variabili $u_{xx} = u_t$, ricordiamo però che nel nostro caso deve valere anche la (1.8).

Una griglia G tale che

$$(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_t) = \left(\Delta_x, \frac{(\Delta_x)^3}{2}, \frac{(\Delta_x)^2}{2}\right) \tag{1.12}$$

ad esempio, verifica le condizioni richieste. Notiamo l'evidente analogia con il gruppo di dilatazioni (1.4).

Infine, utilizzando il principio del massimo e la consistenza dell'operatore L_G, dimostriamo un risultato di convergenza delle soluzioni approssimate, sotto una forte ipotesi di regolarità della soluzione di (1.5) (Teorema 4.2). Tale ipotesi supplementare può in effetti essere rimossa, ma non riportiamo in questa sede la prova completa del risultato.

Vogliamo infine osservare che il problema (1.10) si presta facilmente ad essere tradotto in un programma ricorsivo esplicito da eseguire con un calcolatore. I grafici allegati costituiscono il risultato di alcuni esperimenti che abbiamo effettuato su un personal computer.

Ringraziamenti. Desidero ringraziare V. Simoncini per le interessanti discussioni sugli aspetti numerici di questo problema e per l'aiuto nella realizzazione degli esperimenti.

2. Problema di Dirichlet generalizzato.

Riportiamo ora, senza dimostrazione, alcuni risultati relativi al problema di Dirichlet generalizzato (1.5). Introduciamo alcune notazioni:

Definizione 2.1. *Un punto $z \in \partial Q$ si dice regolare per (1.5) se, qualunque sia $\varphi \in C(\overline{Q})$, risulta*

$$\lim_{\substack{x \to z \\ x \in Q}} u(x) = \varphi(z). \tag{2.1}$$

Chiamiamo bordo regolare di Q l'insieme $\partial_r Q$ dei punti regolari per (1.5).

Definizione 2.2. *Dato $z \in \partial Q$, diremo che il vettore $n = (n_1, n_2, n_3)$ è una normale esterna in z se esiste $\rho > 0$ tale che*

$$B(z + \rho n, \rho) \cap Q = \emptyset,$$

essendo $B(x, \rho) = \{y \in \mathbf{R}^3 : |x - y| < \rho\}$.

Indichiamo

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad v = v(x, y, t) = (0, -x, 1),$$

e definiamo, secondo la classificazione introdotta da Fichera in [F],

$$\begin{aligned}
\Sigma^0 &= \Big\{(x, y, t) \in \partial Q : \langle e_1, n\rangle = 0 \ \forall n \text{ normale esterna in } (x, y, t)\Big\},\\
\Sigma_0 &= \Big\{(x, y, t) \in \Sigma^0 : \langle v, n\rangle = 0 \ \forall n \text{ normale esterna in } (x, y, t)\Big\},\\
\Sigma_1 &= \Big\{(x, y, t) \in \Sigma^0 : \exists n \text{ normale esterna in } (x, y, t), \langle v, n\rangle < 0\Big\},\\
\Sigma_2 &= \Big\{(x, y, t) \in \Sigma^0 : \exists n \text{ normale esterna in } (x, y, t), \langle v, n\rangle > 0\Big\},\\
\Sigma_3 &= \partial Q \backslash \Sigma^0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Possiamo verificare direttamente che

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \Big\{(0, 1, t) : 0 < t < 1\Big\} \cup \Big\{(0, -1, t) : 0 < t < 1\Big\},\\
\Sigma_1 &= \Big\{(x, y, 1) : -1 < x < 1, -1 \le y \le 1\Big\} \cup \Big\{(x, 1, t) : -1 < x < 0, 0 < t \le 1\Big\} \cup\\
&\qquad \Big\{(x, -1, t) : 0 < x < 1, 0 < t \le 1\Big\},\\
\Sigma_2 &= \Big\{(x, y, 0) : -1 < x < 1, -1 \le y \le 1\Big\} \cup \Big\{(x, 1, t) : 0 < x < 1, 0 \le t < 1\Big\} \cup\\
&\qquad \Big\{(x, -1, t) : -1 < x < 0, 0 \le t < 1\Big\},\\
\Sigma_3 &= \Big\{(1, y, t) : -1 \le y \le 1, 0 \le t \le 1\Big\} \cup \Big\{(-1, y, t) : -1 \le y \le 1, 0 \le t \le 1\Big\}.
\end{aligned}$$

Si riconosce poi (cfr [Ma], paragrafo 5) che

$$\partial_r Q = \Sigma_0 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3.$$

La figura 1 mostra la classificazione di Fichera del mantello laterale di Q. La base inferiore di Q è costituita da punti di Σ_2, quella superiore da punti di Σ_1.

3. Problema di Dirichlet discreto.

Determiniamo una griglia G di punti di $\mathbf{R}^3$ e definiamo su tale griglia un operatore L_G costituito da differenze finite, che sia consistente con l'operatore differenziale L.

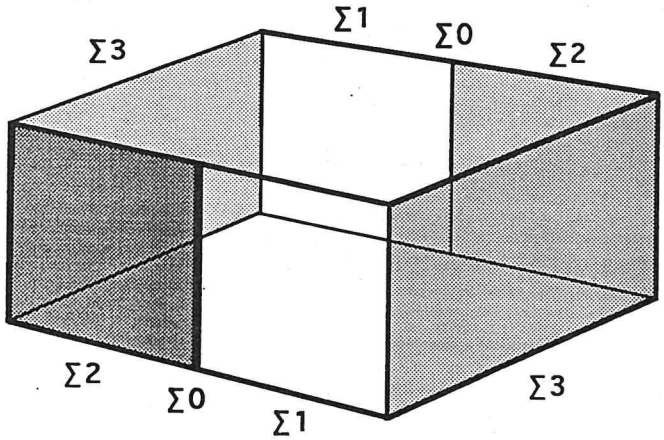


Fig. 1

Osserviamo innanzitutto che la parte del primo ordine nell'equazione di Kolmogorov può essere scritta nella forma seguente

$$u_t - xu_y = \frac{\partial u}{\partial v} \tag{3.2}$$

dove v è il vettore $(0, -x, 1)$. Utilizzando la formula di Taylor si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) = & \frac{u(x+h,y,t) - 2u(x,y,t) + u(x-h,y,t)}{h^2} \\ & + \frac{h^2}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x+\theta h,y,t) - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x-\theta' h,y,t)\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

e

$$\frac{\partial u}{v}(x,y,t) = \frac{u(x,y-\delta x,t+\delta) - u(x,y,t)}{\delta} + \frac{\delta}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(x,y-\theta''\delta x,t+\theta''\delta), \tag{3.4}$$

per opportuni $\theta, \theta', \theta'' \in]0,1[$, e per h, δ positivi arbitrari.

È del tutto naturale definire l'operatore L_G come segue:

$$\begin{aligned} L_G u\,(x,y,t) = & -\frac{u(x,y,t) - u(x,y+\delta x,t-\delta)}{\delta} + \\ & \frac{u(x-h,y+\delta x,t-\delta) - 2u(x,y+\delta x,t-\delta) + u(x+h,y+\delta x,t-\delta)}{h^2}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

in modo tale che sia consistente con l'operatore L, secondo la (1.7):

$$L_G u = Lu + (h^2 + \delta)O(h,\delta).$$

In analogia con quello che si fa per le equazioni paraboliche, definiamo G in modo che abbia passo costante Δ_x lungo l'asse x e Δ_t lungo l'asse t. La definizione di L_G data in (3.5) impone allora di scegliere il passo Δ_y lungo l'asse y nel modo seguente:

$$\Delta_y = \Delta_x \Delta_t,$$

come avevamo dichiarato nell'introduzione. Poniamo quindi

$$G = \Big\{ (j\Delta_x, k\Delta_y, n\Delta_t) \in \mathbf{R}^3 : j, k, n \in Z \Big\}.$$

La figura 2 mostra i punti di G che vengono messi in relazione dall'operatore L_G.

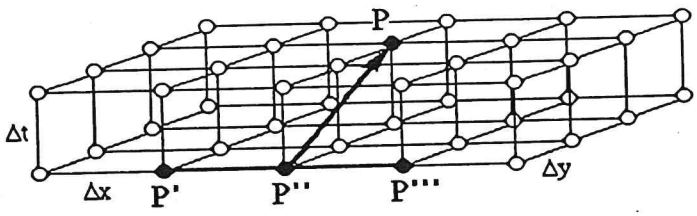


Fig. 2

Nel seguito, per abbreviare le notazioni, scriveremo

$$u^n_{j,k} = u(j\Delta_x, k\Delta_y, n\Delta_t),$$

e

$$L_G u^n_{j,k} = \frac{u^{n-1}_{j-1,k+j} - 2u^{n-1}_{j,k+j} + u^{n-1}_{j+1,k+j}}{(\Delta_x)^2} - \frac{u^n_{j,k} - u^{n-1}_{j,k+j}}{\Delta_t}.$$

Scegliamo per comodità $\Delta_x = 1/J, \Delta_t = 1/N$, con $J, N \in \mathbf{N}$, $\Delta_y = 1/(JN)$, poniamo

$$\begin{aligned} H &= G \cap \overline{Q} \\ H_0 &= \Big\{ (j\Delta_x, k\Delta_y, n\Delta_t) \in H : n > 0, -J < j < J, -JN \le k + j \le JN \Big\} \\ \partial_r H &= H \backslash H_0 \end{aligned}$$

e consideriamo il problema *discretizzato* (1.10)

$$\begin{cases} L_G w = 0 & \text{in } H_0 \\ w = \varphi & \text{in } \partial_r H. \end{cases}$$

Notiamo che l'equazione L_G mette in relazione punti di H solo quando è valutata in H_0. Inoltre si riconosce direttamente che

$$H \cap \partial_r Q \subsetneq \partial_r H, \qquad \operatorname{dist}(P, \partial_r Q) < \Delta_t, \ \forall P \in \partial_r H. \tag{3.6}$$

4. Stabilità e convergenza.

In questo paragrafo forniremo delle stime dell'errore tra la soluzione del problema (1.5) e la soluzione del problema discreto (1.10).

Teorema 4.1 [Principio di massimo]. *Supponiamo che la griglia G verifichi la condizione (1.11)*

$$\frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

e che risulti

$$\begin{cases} L_G w \leq 0 & \text{in } H_0 \\ w \geq 0 & \text{in } \partial_r H. \end{cases} \tag{4.1}$$

Allora $w \geq 0$ in H.

Corollario 4.2 [Stabilità]. *Supponiamo che valga (1.11) e che w sia soluzione di*

$$\begin{cases} L_G w = 0 & \text{in } H_0 \\ w = \varphi & \text{in } \partial_r H. \end{cases}$$

Allora $\max_H |w| = \max_{\partial_r H} |\varphi|$.

Dimostrazione del Teorema 4.1. Procediamo per induzione su n. Per $n = 0$ il risultato è ovvio, in quanto i punti di $(j\Delta_x, k\Delta_y, 0) \in H$ sono in particolare punti di $\partial_r H$.

Supponiamo ora l'affermazione vera per n. Allora, se $(j\Delta_x, k\Delta_y, (n+1)\Delta_t) \in H_0$, dalla (4.1) segue

$$w_{j,k}^{n+1} \geq \left(1 - 2\frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2}\right) w_{j,k+j}^n + \frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} w_{j-1,k+j}^n + \frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} w_{j+1,k+j}^n \geq 0$$

per ipotesi induttiva e per la (1.11). Se invece $(j\Delta_x, k\Delta_y, (n+1)\Delta_t) \in \partial_r H$, l'affermazione è ovvia.

Teorema 4.3 [Convergenza]. *Sia u la soluzione di (1.5), u_G la soluzione di (1.10). Supponiamo inoltre che $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \in C(\overline{Q})$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una griglia G, verificante la condizione di stabilità (1.11) tale che*

$$\max_{P \in H} |u(P) - u_G(P)| \leq \varepsilon.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e poniamo

$$E^- = u - u_G + \varepsilon(2 - x^2), \qquad E^+ = u_G - u + \varepsilon(2 - x^2).$$

Osserviamo che, essendo φ continua e Yu limitata, per la (3.6) possiamo scegliere Δ_t in modo che

$$|\varphi(P) - u(P)| \leq \varepsilon$$

per ogni $P \in \partial_r H$. Di conseguenza, nei punti di $\partial_r H$ risulta

$$E^- \geq \varepsilon(2 - x^2) - \varepsilon \geq 0, \quad E^+ \geq \varepsilon(2 - x^2) - \varepsilon \geq 0,$$

mentre nei punti di H_0 si ha

$$L_G E^- = L_G u - 2\varepsilon, \qquad L_G E^+ = -L_G u - 2\varepsilon.$$

Se indichiamo

$$M(u) = \max_{\overline{Q}} \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right| + \max_{\overline{Q}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \right|,$$

dalla (3.3), dalla (3.4) e dalla condizione di stabilità (1.11) segue immediatamente

$$|L_G u| \leq M(u) \frac{(\Delta_x)^2}{4}$$

in ogni punto di H_0.

Quindi, se

$$\Delta_x \leq \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M(u)}}, \quad \Delta_t \leq \frac{(\Delta_x)^2}{2}, \quad \Delta_y = \Delta_x \Delta_t,$$

si ha

$$\begin{cases} L_G E^- \leq 0 & \text{in } H_0 \\ E^- \geq 0 & \text{in } \partial_r H, \end{cases} \qquad \begin{cases} L_G E^+ \leq 0 & \text{in } H_0 \\ E^+ \geq 0 & \text{in } \partial_r H, \end{cases}$$

da cui segue, per il Teorema 4.1,

$$\max_{P \in H} |u(P) - u_G(P)| \leq \varepsilon.$$

Bibliografia

[F] G. Fichera, Atti Accad. Naz. Lincei **5** (1956).

[LP] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **51,4** (1993), 137–171.

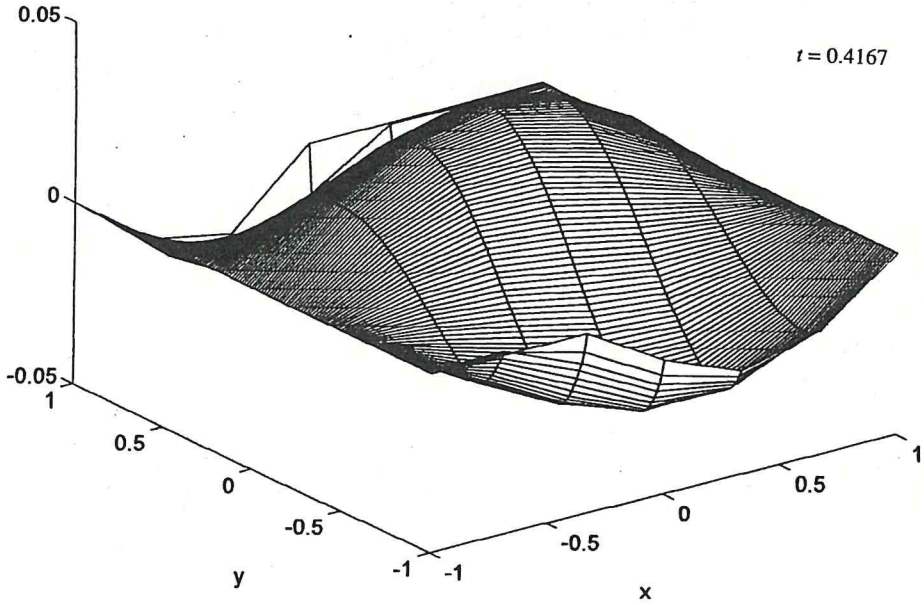
[Ma] M. Manfredini, *Il problema di Dirichlet per una classe di operatori ultraparabolici*, Seminario di Analisi Matematica, Università di Bologna. Tecnoprint, Bologna (A.A. 1994/95), 18–22.

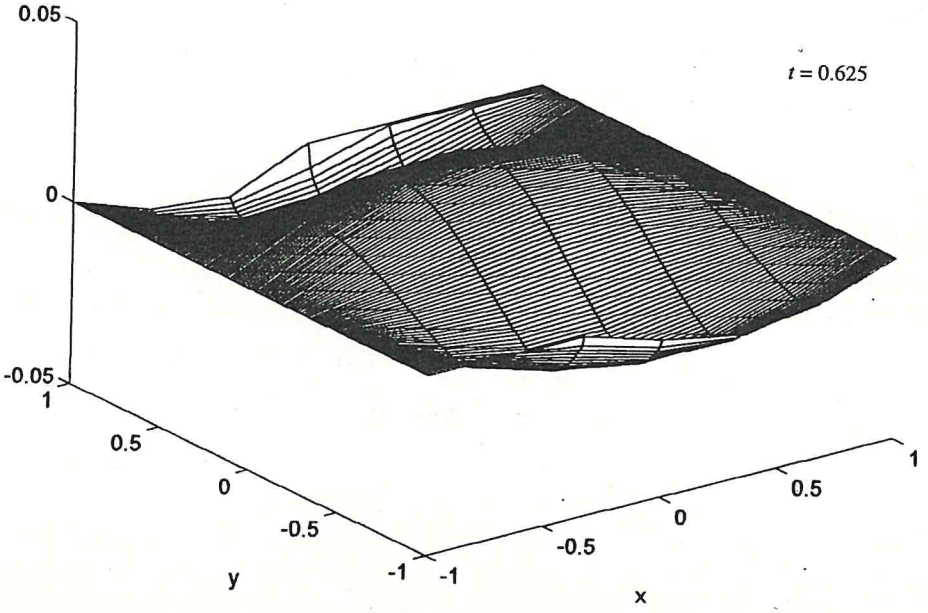
[Mo] C. Mogavero, *Sull'equazione di Kolmogorov: aspetti modellistici e numerici*, Tesi di Laurea, Università di Bologna (A.A. 1994/95).

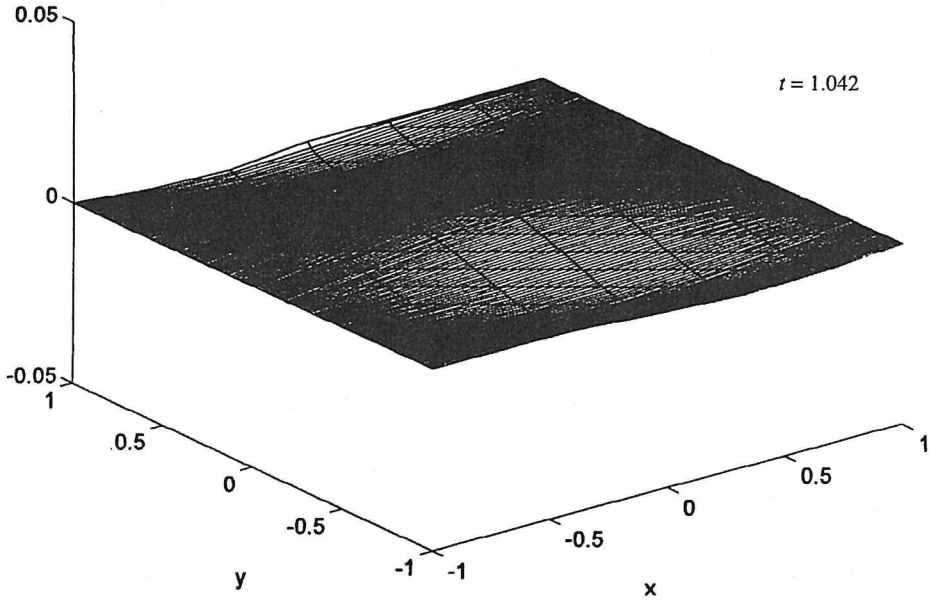
Soluzione approssimata del problema

$$\begin{cases} L_G u = 0 \text{ in } H_0, \\ u = \varphi \text{ in } \partial_r H, \end{cases}$$

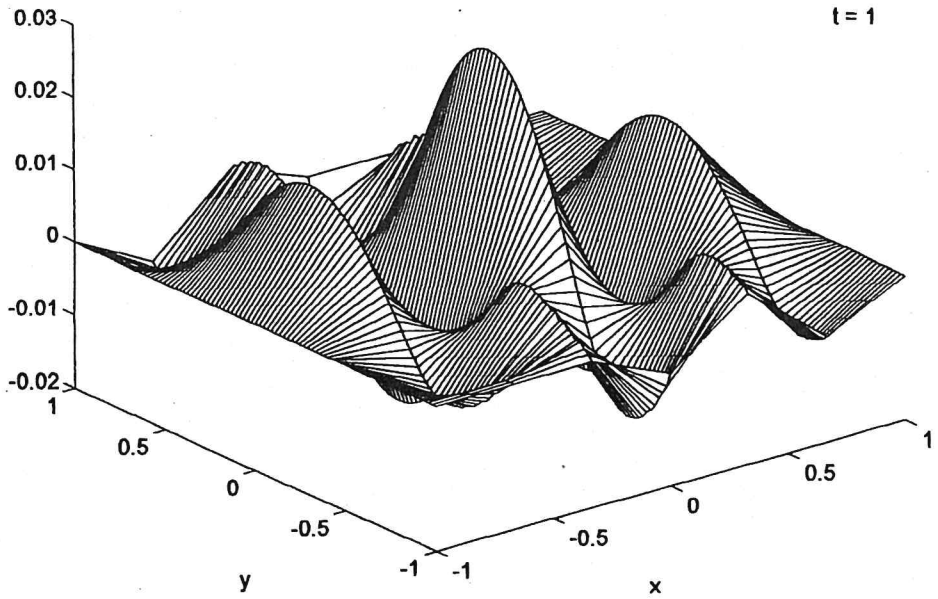
con $\varphi(x,y,t) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ e $\dfrac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} = \dfrac{3}{8}$, calcolata per t costante.







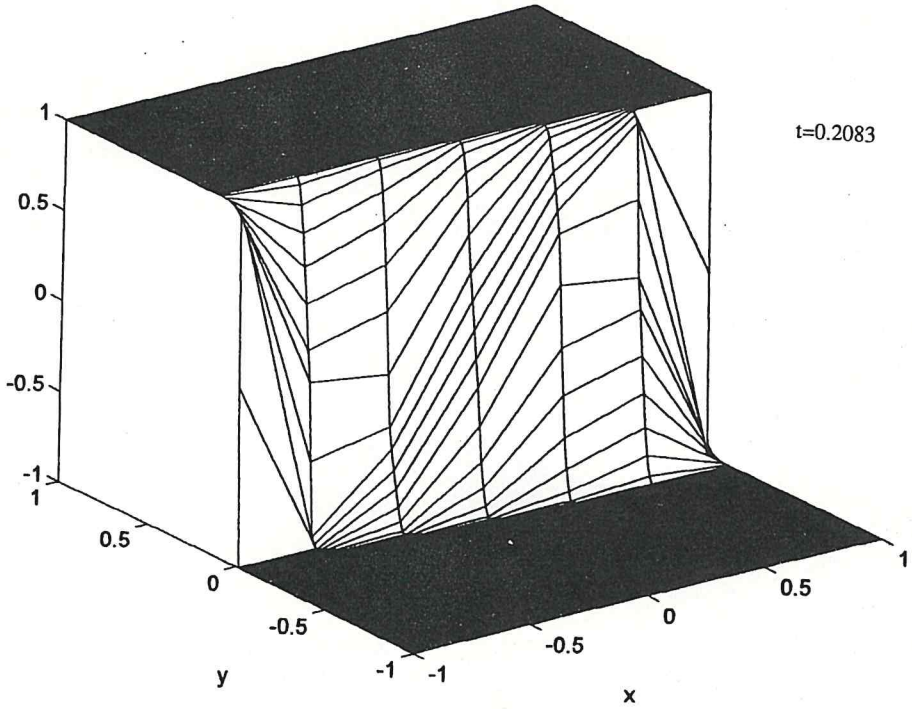
Soluzione approssimata dello stesso problema, ma con $\frac{\Delta_t}{(\Delta_x)^2} = \frac{3}{5}$,

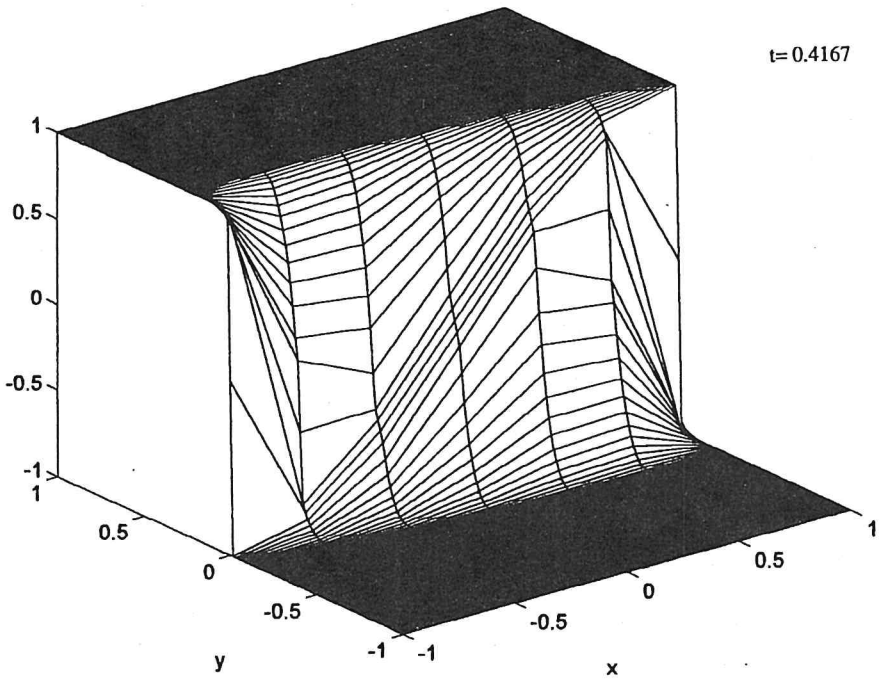


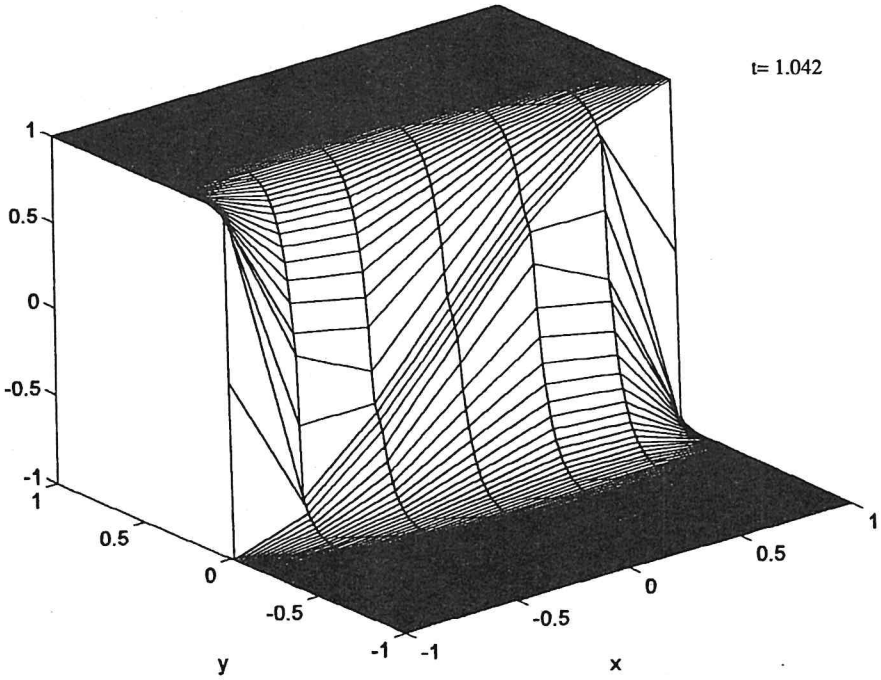
Soluzione approssimata del problema

$$\begin{cases} L_G u = 0 \text{ in } H_0, \\ u = \varphi \text{ in } \partial_r H, \end{cases}$$

con $\varphi(x,y,t) = \text{segno}(y)$. Possiamo osservare che la soluzione è regolare anche nella direzione dell'asse y.



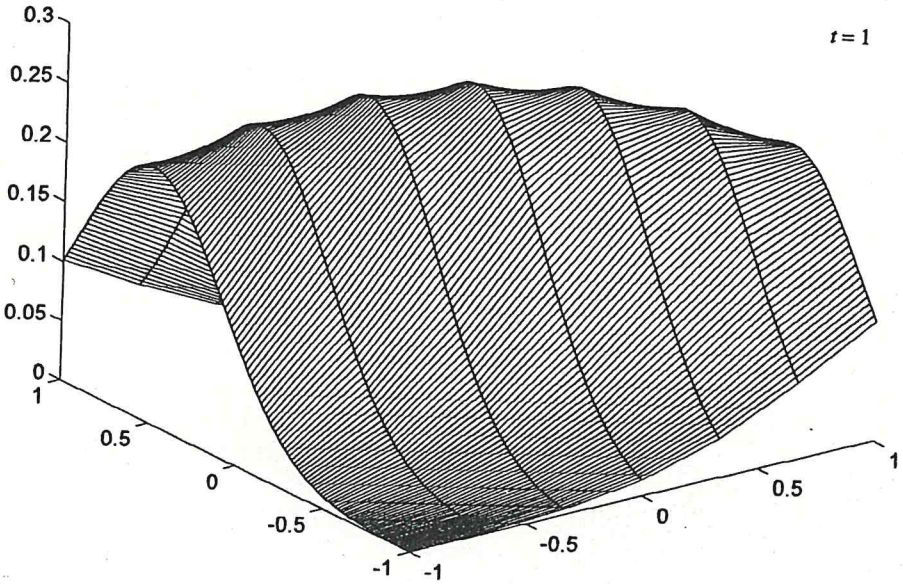

t= 0.4167
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.5
0
0.5
1
x


t= 1.042
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.5
0
0.5
1
x

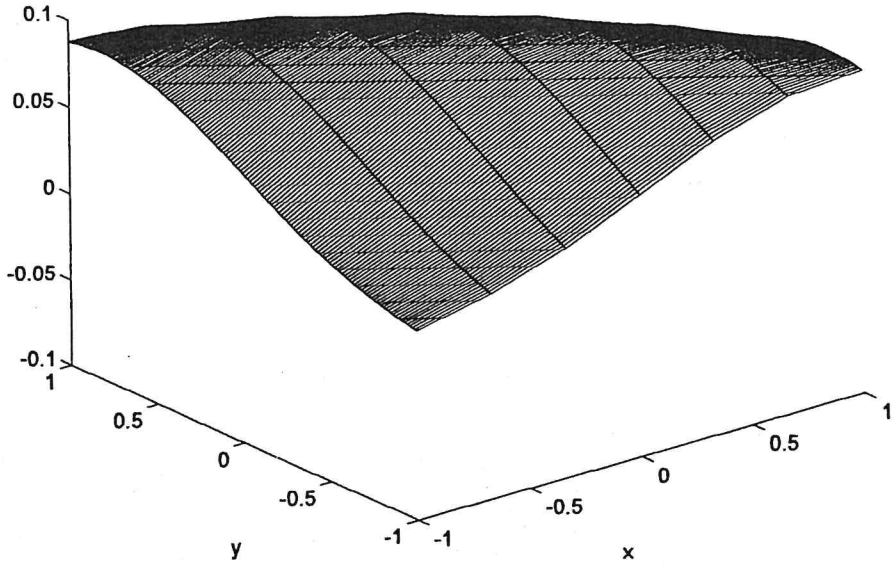
Soluzione approssimata del problema

$$\begin{cases} L_G u = 0 \text{ in } H_0, \\ u = \varphi \text{ in } \partial_r H, \end{cases}$$

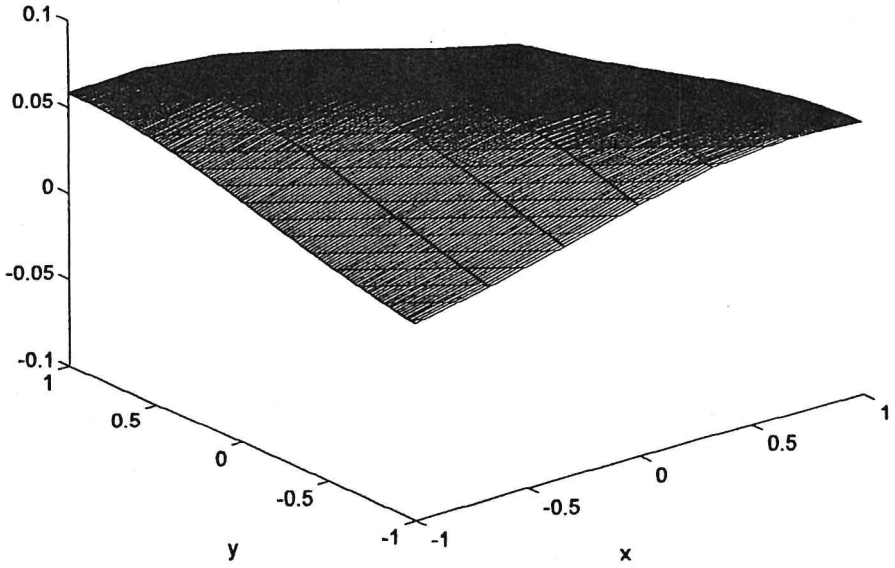
con $\varphi(x,y,t) = \Gamma(x,y,t+1)$, soluzione fondamentale di L. Abbiamo osservato che, nella griglia corrispondente a $\Delta_x = 1/3$ e a $\Delta_t = 1/24$, l'errore relativo si stima nel modo seguente: $\max_H \frac{|u-\Gamma|}{\Gamma} < \frac{7}{100}$.



$t = 0.625$


0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.5
0
0.5
1
x

$t = 1.042$


0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
1
0.5
0
-0.5
-1
y
-1
-0.5
0
0.5
1
x